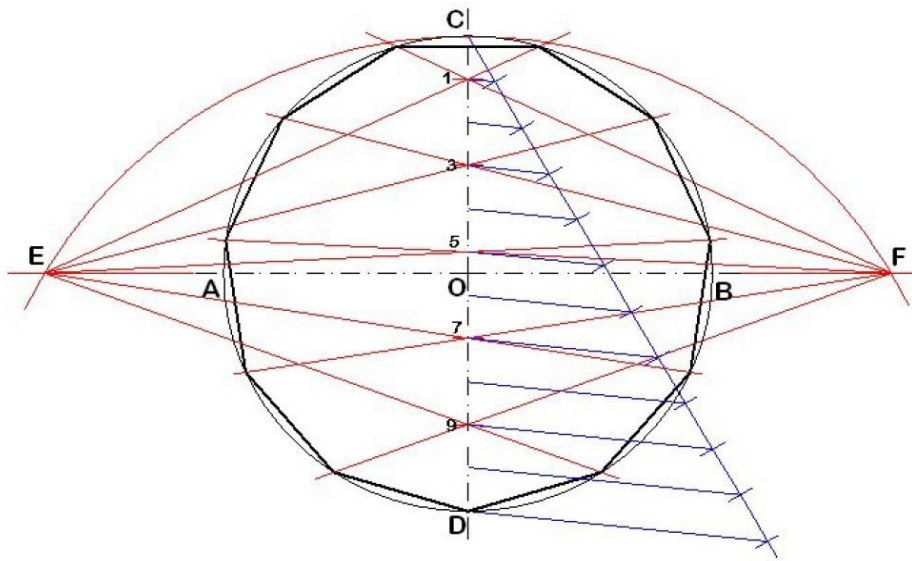


A szabályos sokszögek közelítő szerkesztéséhez

A síkmértani szerkesztések között van egy kedvencünk: *a szabályos n - szög közelítő szerkesztése*. Azért vívta ki nálunk ezt az előkelő helyet, mert nagyon egyszerű és hatékony. Amikor elolvassuk ez utóbbi mondatot, rögtön felvetődik bennünk a kérdés: mitől közelítő ez a szerkesztés. Attól, hogy elvileg nem pontos minden n - re. Az utóbbi kijelentést [1] - re alapoztuk, ahol egy összehasonlító adatsorral mutatják be a szerkesztés „tudását”: $n = 3, 4, 6$ esetén a szerkesztés pontos eredményt ad, más esetekben csak közelítőt. Most erről lesz szó. Először tekintsük az 1. ábrát!



2.15. ábra. Szabályos sokszög szerkesztése általános módszerrel

- Adott R sugárral kört rajzolunk és megrajzoljuk a tengelyeit.
- A vízszintes középvonalat hosszabbítsuk meg az A és B pontok után.
- A kör átmérőjét vegyük körzőnyílásba, és a D pontból rajzoljunk körívet úgy, hogy metssze el a vízszintes középvonalat.
- A függőleges átmérőt osszuk annyi egyenlő részre, ahány oldalú sokszöget szeretnénk rajzolni (a 2.1.2. pontban leírtak szerint). A 2.15. ábrán 11 oldalú sokszög látható.
- A függőleges átmérőn jelöljük ki a páratlan számú osztópontokat. Húzzunk egyeneseket az E pontból a kijelölt pontokon keresztül úgy, hogy az átmérő túloldalán a kört elmetsszék.
- A F pontból ismételjük meg az előző műveletet.
- Ezek az egyenesek az ábrán is látható módon meghatározzák a sokszög csúcsait a körön.

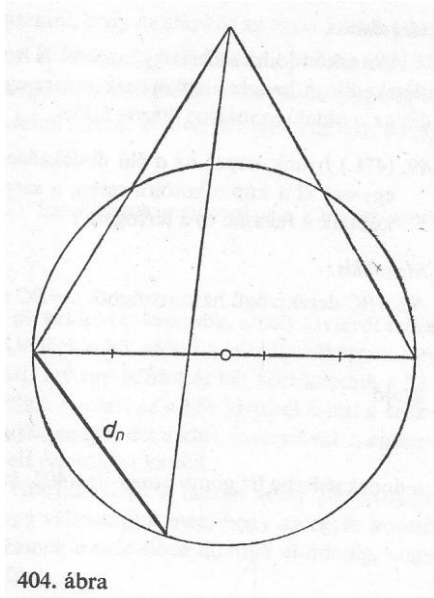
1. ábra – forrása:

http://eptan.fmk.nyime.hu/eptan/oktadat/Entries/2011/2/17_Szabadkezi_rajz_files/Muszaki_abrazolas_I.pdf

Itt egy szabályos 11 - szög szerkesztését mutatják be.

Az [1] munkában egy általánosabb leírást olvashatunk.

Vegyünk fel egy kört, amelyet a sokszög köréírható körének tekintünk. A kör egyik átmérőjét n egyenlő részre osztjuk, és az átmérő fölé egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk. A háromszögnek az átmérőn kívüli csúcsát összekötjük az átmérő egyik végpontjával számított második osztásponttal, és ezzel az egyenessel elmetsszük a kört (404. ábra).



404. ábra

2. ábra – forrása: [1]

A háromszögön kívül eső metszéspontnak és az átmérő előbb említett végpontjának d_n távolsága a szabályos n - szög a_n oldalhosszána jó közelítő értéke.

Eddig az idézet [1] - ből. A [2] munkában egy nagyon hasonló leírást találunk erről.

A továbbiakban úgy járunk el – [1] megfogalmazásával – , hogy d_n - et analitikus geometriai úton, a_n - et a trigonometria segítségével határozzuk meg, majd e két eredményt összehasonlítjuk. Ezt a számítást [1] - ben nem részletezik.

Az alábbiakban két esetet kell megvizsgálnunk, annak megfelelően, hogy az x_M koordináta pozitív vagy negatív. Hogy erre mi szükség van, az a számításokból kiderül.

1. eset: $x_M > 0$ – ld. 3. ábra!

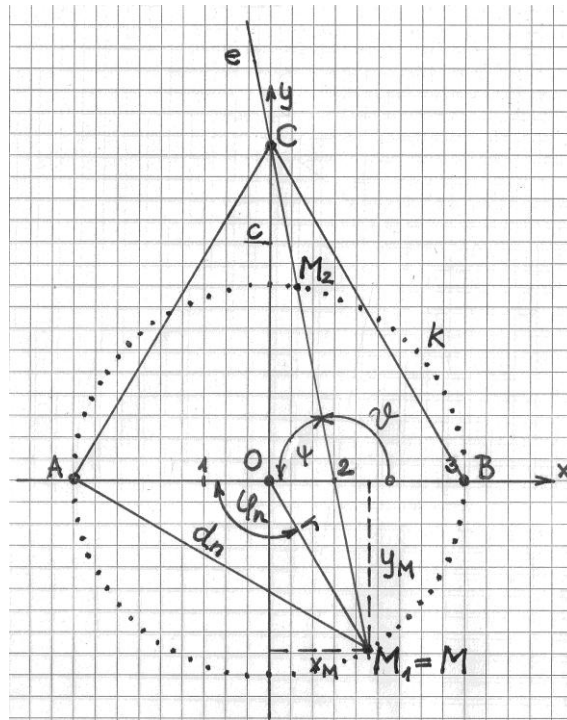
Itt a d_n közelítő oldalhossz számításához szükséges mennyiségeket tüntettük fel. A k körnek és az e egyenesnek két metszéspontja van, M_1 és M_2 . A 2. és a 3. ábráról leolvashatóan nekünk az $M_1 \equiv M$ metszéspontra, illetve koordinátáira lesz szükségünk. Az analitikus geometriai megoldás az alábbiak szerint alakul.

Az r sugarú k kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2 . \quad (1)$$

A C ponton átmenő, ϑ hajlású e egyenes egyenlete:

$$y = c + x \cdot \operatorname{tg} \vartheta . \quad (2)$$



3. ábra

A 3. ábrából:

$$c = \sqrt{3} \cdot r ; \quad (3)$$

majd:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg}(180^\circ - \psi) = -\operatorname{tg} \psi = -\frac{\sqrt{3} \cdot r}{2 \cdot \frac{2 \cdot r}{n} - r} = -\frac{\sqrt{3}}{\frac{4}{n} - 1} . \quad (4)$$

Az e egyenes egyenlete (2), (3) és (4) - gyel:

$$y_e = \sqrt{3} \cdot r - \frac{\sqrt{3}}{\frac{4}{n} - 1} \cdot x , \quad (5)$$

vagy kényelmesebb írásmóddal:

$$y_e = \sqrt{3} \cdot r - m \cdot x , \quad (6)$$

ahol:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{\frac{4}{n} - 1} . \quad (7)$$

Az M pont meghatározásához:

$\sim (1)$ -ből:

$$y_k^2 = r^2 - x^2; \quad (8)$$

$\sim (5)$ -ből:

$$y_e^2 = (\sqrt{3} \cdot r - m \cdot x)^2; \quad (9)$$

az $\mathbf{M}$ pontban $y_k = y_e$, így ez igaz négyzetükre is:

$$y_k^2 = y_e^2; \quad (10)$$

majd (8) , (9) és (10) szerint:

$$r^2 - x_M^2 = (\sqrt{3} \cdot r - m \cdot x_M)^2; \quad (*)$$

kifejtve:

$$r^2 - x_M^2 = 3 \cdot r^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m \cdot x_M + m^2 \cdot x_M^2;$$

rendezve:

$$(1 + m^2) \cdot x_M^2 - (2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m) \cdot x_M + 2 \cdot r^2 = 0. \quad (11)$$

A (11) másodfokú egyenletet a megoldó - képlettel megoldva:

$$x_{M_{1,2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m \pm \sqrt{(2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot 2 \cdot r^2}}{2 \cdot (1 + m^2)}; \quad (12)$$

a négyzetgyök alatti mennyiséget kifejtve:

$$\begin{aligned} D &\equiv (2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot 2 \cdot r^2 = 12 \cdot r^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r^2 - 8 \cdot r^2 \cdot m^2 = \\ &= 4 \cdot r^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r^2 = 4 \cdot r^2 \cdot (m^2 - 2), \end{aligned}$$

tehát:

$$D = 4 \cdot r^2 \cdot (m^2 - 2). \quad (13)$$

Most (12) és (13) - mal:

$$x_{M_{1,2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m \pm \sqrt{4 \cdot r^2 \cdot (m^2 - 2)}}{2 \cdot (1 + m^2)} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m \pm 2 \cdot r \cdot \sqrt{m^2 - 2}}{2 \cdot (1 + m^2)}; \quad (14)$$

átalakítva:

$$x_{M_{1,2}} = r \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot m \pm \sqrt{m^2 - 2}}{1 + m^2}. \quad (15)$$

Mivel $x_M = x_{M1}$, ezért $m > 0$ és véges ($n = 3$) esetében (15) -ből:

$$x_M = r \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot m + \sqrt{m^2 - 2}}{1 + m^2}. \quad (16)$$

A d_n közelítő oldalhossz számítása a 3. ábra alapján:

$$\begin{aligned} d_n^2 &= (r + x_M)^2 + y_M^2 = (r + x_M)^2 + r^2 - x_M^2 = r^2 + 2 \cdot r \cdot x_M + x_M^2 + r^2 - x_M^2 = \\ &= r^2 + 2 \cdot r \cdot x_M + r^2 = 2 \cdot r^2 + 2 \cdot r \cdot x_M = 2 \cdot r^2 \cdot \left(1 + \frac{x_M}{r}\right), \end{aligned}$$

innen:

$$d_n = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 + \frac{x_M}{r}\right)}. \quad (17)$$

Most (16) és (17) szerint:

$$d_n = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3} \cdot m + \sqrt{m^2 - 2}}{1 + m^2}\right)}; \quad (18)$$

Majd (7) és (18) - cal:

$$d_n = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left[1 + \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\frac{4}{n}-1} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\frac{4}{n}-1}\right)^2 - 2}}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\frac{4}{n}-1}\right)^2}\right]} = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left[1 + \frac{\frac{3}{\frac{4}{n}-1} + \sqrt{\frac{3}{\left(\frac{4}{n}-1\right)^2} - 2}}{1 + \frac{3}{\left(\frac{4}{n}-1\right)^2}}\right]}, \quad (19)$$

tehát:

$$d_n = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left[1 + \frac{\frac{3}{\frac{4}{n}-1} + \sqrt{\frac{3}{\left(\frac{4}{n}-1\right)^2} - 2}}{1 + \frac{3}{\left(\frac{4}{n}-1\right)^2}}\right]}. \quad (20)$$

Korlátozó feltétel: az $1 / (4 / n - 1)$ alakú tagokban a nevező nagyobb nullánál, azaz $n = 3$.
Grafikont készítünk a d_n / r dimenziótlan mennyiségre, melynél $n \rightarrow x$, ahol $3 \leq x < 4$.

A szabályos n - szög oldalhosszának pontos kifejezése trigonometriai úton – ld. korábbi dolgozatunkat, melynek címe: *A szabályos ötszög szerkesztéséhez* – :

$$a_n = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos \frac{360^\circ}{n}\right)}. \quad (21)$$

A közelítő oldalhossz négyzetére az 5. ábra szerint, (8) - cal is:

$$\begin{aligned} d_n^2 &= (r - |x_M|)^2 + y_M^2 = (r - |x_M|)^2 + r^2 - x_M^2 = r^2 - 2 \cdot r \cdot |x_M| + x_M^2 + r^2 - x_M^2 = \\ &= r^2 - 2 \cdot r \cdot |x_M| + r^2 = 2 \cdot r^2 - 2 \cdot r \cdot |x_M| = 2 \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{|x_M|}{r}\right), \end{aligned}$$

tehát:

$$d_n^2 = 2 \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{|x_M|}{r}\right), \quad (22)$$

innen pozitív gyökvonással:

$$d_n = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{|x_M|}{r}\right)}. \quad (23)$$

A most vizsgált esetben az egyenes és a kör metszéspontjához az alábbiak szerint jutunk.

Az egyenes egyenlete (2) szerint:

$$y = c + x \cdot \operatorname{tg} \vartheta. \quad (2)$$

Benne, az 5. ábra szerint:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{3} \cdot r}{r - 2 \cdot \frac{2 \cdot r}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{4}{n}}. \quad (24)$$

Most (2), (3) és (24) - gyel:

$$y_e = \sqrt{3} \cdot r + \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{4}{n}} \cdot x; \quad (25)$$

ismét bevezetve az

$$m = \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{4}{n}} \quad (26)$$

egyszerűsítő jelölést, (25) és (26) - tal:

$$y_e = \sqrt{3} \cdot r + m \cdot x. \quad (27)$$

Az $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$ metszéspont meghatározásához, a korábbiakhoz hasonlóan:

$$r^2 - x_M^2 = \left(\sqrt{3} \cdot r + m \cdot x_M\right)^2; \quad (**)$$

kifejtve:

$$r^2 - x_M^2 = 3 \cdot r^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m \cdot x_M + m^2 \cdot x_M^2;$$

rendezve:

$$(m^2 + 1) \cdot x_M^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m \cdot x_M + 2 \cdot r^2 = 0. \quad (28)$$

A (28) másodfokú egyenletet a megoldó - képlettel megoldva:

$$x_{M_{1,2}} = \frac{-2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m \pm \sqrt{(2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 2 \cdot r^2}}{2 \cdot (m^2 + 1)}; \quad (29)$$

majd (13) és (29) - cel:

$$x_{M_{1,2}} = \frac{-2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m \pm \sqrt{4 \cdot r^2 \cdot (m^2 - 2)}}{2 \cdot (m^2 + 1)} = \frac{-2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot m \pm 2 \cdot r \cdot \sqrt{m^2 - 2}}{2 \cdot (m^2 + 1)}, \text{ tehát:}$$

$$x_{M_{1,2}} = -r \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot m \mp \sqrt{m^2 - 2}}{m^2 + 1}. \quad (30)$$

Ebből, tekintettel arra is, hogy itt $m < 0$:

$$\left| \frac{x_{M_{1,2}}}{r} \right|_{\max} = \frac{|\sqrt{3} \cdot m \mp \sqrt{m^2 - 2}|}{m^2 + 1} \Big|_{\max} = \frac{|-\sqrt{3} \cdot |m| - \sqrt{m^2 - 2}|}{m^2 + 1} = \frac{\sqrt{3} \cdot |m| + \sqrt{m^2 - 2}}{m^2 + 1}, \text{ tehát:}$$

$$\left| \frac{x_{M_{1,2}}}{r} \right|_{\max} = \frac{|x_M|}{r} = \frac{\sqrt{3} \cdot |m| + \sqrt{m^2 - 2}}{m^2 + 1}. \quad (31)$$

Most (23) és (31) - gyel:

$$d_n = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3} \cdot |m| + \sqrt{m^2 - 2}}{m^2 + 1} \right)}; \quad (32)$$

majd (26) és (32) - vel:

$$d_n = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{3} \cdot \left| \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{4}{n}} \right| + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{4}{n}} \right)^2 - 2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{4}{n}} \right)^2 + 1} \right]} = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left[1 - \frac{\left| \frac{3}{1 - \frac{4}{n}} \right| + \sqrt{\frac{3}{\left(1 - \frac{4}{n} \right)^2} - 2}}{\frac{3}{\left(1 - \frac{4}{n} \right)^2} + 1} \right]}, \text{ tehát:}$$

$$d_n = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left[1 - \frac{\frac{3}{\left| 1 - \frac{4}{n} \right|} + \sqrt{\frac{3}{\left(1 - \frac{4}{n} \right)^2} - 2}}{\frac{3}{\left(1 - \frac{4}{n} \right)^2} + 1} \right]}. \quad (33)$$

Ismát ábrázoljuk a (33) - ből adódó d_n/r kifejezést, folytonosnak tekintett változóval, összehasonlítva (21) - gyel; ld. 6. ábra!



6. ábra

Itt is jól látszik, mennyire fedí a közelítő függvény a pontosat – nem csak diszkrét értékekkel dolgozva. Végül „bekapcsoljuk” mindhárom grafikont, ekkor kapjuk a 7. ábrát.



7. ábra

Ezen is jól látszik, hogy a két közelítő függvény mennyire jól illeszkedik a pontoshoz. A közelítő szerkesztés tehát tökéletesen alkalmas a gyakorlati feladatok megoldására. Ezt a gyakorlatban sokszor tapasztaltuk; most egy kicsit benéztünk a függöny mögé is.

Az elején említettük, hogy [1] szerint e szerkesztés $n = 3, 4, 6$ esetén a pontos oldal - hosszát adja. Ezért is ilyen jó a görbék illeszkedése egymáshoz.

Most már talán érthető, hogy miért erőltettük a folytonos görbék rajzolását; ugyanis a diszkrét függvények ábrázolásával csak pontbeli illeszkedést vizsgáltunk volna, nem pedig tartománybelit. Utóbbi sokkal jobban segíti a helyes kép kialakítását, valamint az elkövetett képletbeviteli hibák kijavítását is.

Megjegyezzük, hogy eddig nem foglalkoztunk az $n = 4$ esettel, amikor $tg\theta \rightarrow \infty$.

A görbék csatlakozása az $x = 4$ szakaszhatáron gyakorlatilag „zökkenőmentes”, vagyis balról és jobbról megközelítve a határt a függvények ugyanahhoz az értékhez tartanak.

Ez az alkalmazott **Graph** szoftver függvényérték - számító szolgáltatásával jól követhető.

Érdeemes megfigyelni, hogy a vizsgált függvények csökkenő jellegűek; ez megfelel annak a tapasztalati ténynek, hogy a sokszög oldalai számának növelésével az egyes oldalak hossza csökken.

Megemlítjük még azt a tényt is, hogy az 1. ábra szerkesztése nemcsak egy sokszögoldal hosszát, hanem annak helyét is megadja. Tényleg minden okunk megvan rá, hogy nagyon kedveljük. Minthogy tetszőleges oldalszámú szabályos sokszögre nincs elvileg pontos szerkesztés – [1] –, ezért is kaphat kiemelt figyelmet e közelítő megoldás.

(Vajon ki találta ezt ki, és hogyan? A „hogyan” - ra ugyanis még nem kaptunk választ.)

Az elvileg pontos és közelítő szerkesztésekről még [2] - ben is olvashatunk érdekes dolgokat. Az itt vizsgált szerkesztéssel kapcsolatban ezt írja a szerző:

Ha ezzel az eljárással szabályos hétszöget szerkesztünk, gyakorlatilag ugyanolyan megbízhatóan járunk el, mint amikor euklideszi szerkesztéssel pl. szabályos ötszöget szerkesztünk.

Források:

[1] – **Pelle Béla**: Geometria

Tankönyvkiadó, Budapest, 1979., 476 ~ 477. o., 132. o.

[2] – **Hajós György**: Bevezetés a geometriába

6. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979., 158. o.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnökstanár

Sződliget, 2015. 11. 22.